Plan détaillé [144] :

I) Racines d'un polynôme :

· $\mathbb{K}$ corps commutatif

DÉF$_1$: Racine d'un polyn.

PROP$_2$: $a \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}[X]$; a racine de $P \iff X-a \mid P$ dans $\mathbb{K}[X]$

DÉF$_3$: ordre d'une racine ($(X-a)^h \mid P$, $(X-a)^{h+1} \nmid P$)

PROP$_4$: $(a_i) \in \mathbb{K}$ racines de $P \rightsquigarrow P = (X-a_1)^{h_1} \cdots (X-a_r)^{h_r} Q$

Csq$_5$: P a au + deg(n) racines.

· ⚠ ce n'est plus vrai sur un anneau $\rightsquigarrow$ ex $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$

PROP$_6$: polyn avec infinité de racines $= 0$

DÉF$_7$: Polyn. scindé

Rappel$_8$: Polyn. dérivé

THM$_9$: Formule de Taylor (pour polynômes)) ①

THM$_{10}$: Carac. de l'ordre d'une racine avec polyn. P', $P^{(i)}$) ②

[GOU] p.59–61

DÉF$_{11}$: Polyn irréductible sur $\mathbb{K}[X]$

Rem$_{12}$: déf sur $A[X]$

[PER]

PROP$_{13}$: polyn de d° > 1 irréd est sans racines ; récip fausse

Ex$_{14}$: exemple

THM$_{14}$: polyn de d° 2 ou 3 sans racines est irréd.

[GOZ] p.9

II) Théorie des corps et polynômes :

A) Extension algébrique et clôture :

DÉF$_{15}$: Extension de corps

+ ex.

DÉF$_{16}$: Degré d'une extension

THM$_{17}$: Base télescopique

DÉF$_{18}$: Déf élément algébrique / transcendant avec polyn.

Rem$_{19}$: ① Est $\varphi \mid \mathbb{K}[X] \to L$, $X \mapsto \alpha$ injectif, ou non | + déf polyn. minimal

+ exemples

[PER] p.74

[PER] p.75

THM$_{20}$: élém^t alg $\iff \dim_K(K(\alpha)) < +\infty$ $m = \deg(\pi_\alpha) \dots$

DÉF$_{21}$: extension algébrique

DÉF$_{22}$: Corps alg. clos + exemple $\overline{\mathbb{Q}}$

[GOZ] p.62

PROP-DÉF$_{23}$: Clôture algébrique

B) Corps de rupture et de décomposition :

[PER] p.78–81

DÉF$_{24}$: Corps de rupture

ex.

THM$_{25}$: existence et unicité

DÉF$_{25}$: Corps de décomposition

THM$_{26}$: Existence et unicité

+ exemples

THM$_{27}$: Existence et unicité des corps finis

[GOZ] p.55

Ex$_{28}$: Construction de $\mathbb{F}_4$

C) Irréductibilité de polynômes et racines :

[PER] p.85–86

THM$_{29}$: irréd. et réduction

Rem$_{30}$: ~~en~~ on peut associer Thm$_{29}$ et Thm$_{14}$: ex...

THM$_{31}$: P irréd sur $K \iff P$ n'a pas de racines dans les ext. de d° $\leq$ d° $P/2$

Ex$_{32}$: $X^4 + X + 1$ irréd. sur $\mathbb{F}_2$.

III) Polynômes symétriques élémentaires

· On se place sur A anneau intègre (en général $\mathbb{Z}$)

A) Définitions - Relations coeff-racines : $n \geq 1$

[GOZ] p.12–14

DÉF$_{33}$: Polynômes sym. de $A[X_1, \dots, X_n]$.

Exemple$_{34}$: ...

DÉF$_{35}$: Polyn. sym. élém. notés Σ_k.

PROP$_{36}$: Σ_k = somme de $\binom{n}{k}$ monômes de d° k, homogène, deg partiel p/r à X_i : k

[GOZ] p.17

THM$_{37}$: Relations - coeff - racines

Ex sur polyn d° 2

Plan détaillé | 144 | suite :

II) B) Théorème de structure :

DÉF 38 : Poids de $P \in A[X_1, \dots, X_n]$

PROP 39 : $P \in A[X_1, \dots, X_n] \neq 0$, de poids π, $Q(X_1, \dots, X_n) = P(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$ est sym de ~~poids~~ $d° \leq \pi$ (3)

Lemme 40 : $P(X_1, \dots, X_{j-1}, 0, X_{j+1}, \dots, X_n) = 0 \Rightarrow \Sigma_n \mid P$ $\forall j \in [\![1;n]\!]$ (4)

THM 41 : Structure (5)

Ex 42 : $S_2 = X_1^2 + \dots + X_n^2 = \Sigma_1^2 - 2\Sigma_2$

Cor 43 : $A \subseteq B$ 2 anneaux. $P \in A[X]$ unitaire scindé sur B de racines $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in B$
$\forall S \in A[X_1, \dots, X_n]^{S_n}$, $S(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A$

[GOZ] p.15

DÉF 44 : Sommes de Newton (polyn. sym)

PROP 45 : • $\forall k \in [\![1; n-1]\!]$, $S_k - \Sigma_1 S_{k-1} + \dots + (-1)^{k-1} \Sigma_{k-1} S_1 + (-1)^k k \Sigma_k = 0$
• $\forall p \in \mathbb{N}$, $S_{p+n} - \Sigma_1 S_{p+n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \Sigma_{n-1} S_{p+1} + (-1)^n \Sigma_n S_p = 0$ (6)

Rem 46 : permet d'obtenir les $(S_p)_p$ par réc.

[GOU] p.86 87

Appli 47 Thm Kronecker : $\boxed{\text{Dév 1}}$

[FRA] p.

III) Applications :

A) Localisation de racines :

PROP 48 : propriétés des "racines évidentes" sur $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q}$ + exemple.

THM 49 (Rolle) : $P \in \mathbb{R}[X]$, $a<b$ 2 racines successives, P' a un nbre impair de racines dans $]a;b[$ (7)

[Hi] p.198

PROP 50 (Règle de Newton) : $P \in \mathbb{R}[X]$, $d°P = n$ $L \in \mathbb{R}$ tq $P^{(i)}(L) \geq 0$ $\forall i \in [\![0;n]\!]$, alors toute racine réelle x vérifie $x \leq L$ (8)

[HI] p.200

PROP 51 : (Lagrange - MacLaurin) : $P = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{R}[X]$, $a_i \geq 0$ $\forall i \in [\![1; m-1]\!]$
$A = \max\{-a_m, \dots, -a_n, 0\} \rightarrow$ racine réelle $x < 1 + A^{1/m}$ (9)
+ exemple

[HI] p.200

[Hi] p.203 204 pas sûre de la mettre

Notation : $P \in \mathbb{R}[X]$, $a<b$ tq $P(a)P(b) \neq 0$. On considère la suite :
$P_0 = P$, $P_1 = -P \bmod P'$, …, $P_{i+1} = -P_{i-1} \bmod P_i$, …, $P_{n+1} = 0$
et $\forall i \in [\![0;n]\!]$, $Q_i := \frac{P_i}{P_n}$,
$\forall x \in]a;b[$, on note $V(x)$ le nombre de changement de signe de la suite $(Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_n(x))$ (10)

THM 52 (Sturm) : Avec les notations précédentes : le nombre de zéros $\neq$ de Q_0 dans $[a;b]$ est $V(a) - V(b)$.

[CAL] p.339

PROP 53 : (Formes de Hankel) : $P \in \mathbb{R}[X]$, $d°P = n$ racines $x_1, \dots, x_t$ multiplicité m_ℓ. On pose $s_k = \sum_{\ell=1}^{t} m_\ell x_\ell^k$ (somme de Newton avec mult)
et $q(z_1, \dots, z_n) = \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} s_{i+j} z_i z_j$ forme quad sur $\mathbb{C}^n$, $\tilde{q} = q_{|\mathbb{R}^n}$ f.q. sur $\mathbb{R}^n$
soit (s,t) la signature de $\tilde{q}$.
$\hookrightarrow$ $p+q$ = nbres de racines $\neq$ de P
$p-q$ = ——— réelles de P

Dév 2

B) Réduction des endomorphismes : E un $\mathbb{K}$-ev de dim $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$

Déf 54 : • Valeur propre de $u \longleftrightarrow A \in M_n(\mathbb{K})$
• déf $\chi_u \longleftrightarrow \chi_A$

[GOU] & [G] p.172 174

PROP 55 : racines de χ_u = v.p. de u

Rem 56 : Via relat° coeff racines : Σ v.p. = $\mathrm{Tr}(A)$, Π v.p. = $\det(A)$

THM 57 : A trigonalisable $\Leftrightarrow \chi_A$ scindé (11)

THM 58 : A diagonalisable $\Leftrightarrow \chi_A$ scindé et ordre mult = $\dim E_{\lambda_i} \Leftrightarrow \exists$ v.p. λ_i tq $E = \oplus E_{\lambda_i}$ (12)

[GOU] p.187

DEF 59 : matrice compagnon d'un polyn unitaire

PROP 60 : $\chi_{C(P)} = P$ (13)

Rem 61 : Rechercher racines de P = rechercher v.p de $\chi_{C(P)}$